Title	バナッハ空間の実数パラメータ漸近的非拡大半群の不動点定理と強収束定理 (応用函数解析としての情報数理の研究)
Author(s)	高橋, 渉; 善林, 啓
Citation	数理解析研究所講究録 (2005), 1452: 53-62
Issue Date	2005-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/47777
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 53-62

バナッハ空間の実数パラメータ漸近的非拡大半群の不動点定理と強収束定理

Wataru Takahashi(高橋　渉), Kei Zembayashi(善林　啓)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology, Tokyo 152-8552, Japan
(東京工業大学 大学院情報理工学研究科)

1　はじめに

C をバナッハ空間 E のコンパクトで凸な部分集合とする. $\{T(t):t\geq 0\}$ が, C 上のリプシッツ定数 $\{k(t):t\geq 0\}$ をもつ実数パラメータ漸近的非拡大半群 (one-parameter asymptotically nonexpansive semigroup) であるということを以下のように定義する:

(i) $\|T(t)x-T(t)y\|\leq k(t)\|x-y\|, \forall x,y\in C$;

(ii) $T(t+s)x=T(t)T(s)x\ \forall t,s\geq 0, \forall x\in C$;

(iii) $T(0)x=x, \forall x\in C$;

(iv) $\forall x\in C, t\mapsto T(t)x$ が連続写像;

(v) $t\mapsto k(t)$:$[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$ が連続;

(vi) $k(t)\geq 1, \forall t\geq 0$ かつ, $\limsup_{t\rightarrow\infty}k(t)=1$.

写像族 $\{T(t):t\geq 0\}$ について, $k(t)=1, \forall t\geq 0$ となるとき, $\{T(t):t\geq 0\}$ を C 上の実数パラメータ非拡大半群 (one-parameter nonexpansive semigroup) と呼ぶ.

2004 年, 鈴木–高橋 [4] により以下の定理が証明された:

C をバナッハ空間 E のコンパクトで凸な部分集合とし, $\{T(t):t\geq 0\}$ を C 上の one-parameter nonexpansive semigroup とする. $x_1\in C$ とし, 数列 $\{x_n\}\in C$ を以下のように定義する:

$$x_{n+1}=\frac{\alpha_n}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n ds+(1-\alpha_n)x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{t_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \le \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{t_{n+1}} = 1$$

を満たすとする. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T(t) : t \ge 0\}$ の共通不動点 z_0 に強収束する.

本研究では, 鈴木–高橋の結果 [4] に動機づけられ, 一般のバナッハ空間のコンパクトで凸な部分集合上で定義された one-parameter asymptotically nonexpansive semigroup に関する 2 つの不動点定理を得た. さらに, 一般のバナッハ空間のコンパクトで凸な部分集合上で定義された one-parameter asymptotically nonexpansive semigroup の共通不動点を求める点列的近似法を導入し, 上の結果を用いることによりこの点列が共通不動点に強収束する, という結果も得た. この結果は鈴木–高橋 [4] によって証明された結果の一般化でもある.

2 準備

$\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}^+$ をそれぞれ, 自然数と非負な実数とする. $C(\mathbb{R}^+)$ を $\mathbb{R}^+$ で定義された有界な実数値連続関数全体の作るバナッハ空間とする. ただし, $C(\mathbb{R}^+)$ におけるノルムは supremum ノルムである. E をバナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. そのとき, E 上の写像 J を以下のように定義する:

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\},\ \forall x \in E.$$

Hahn-Banach の定理から, $J(x)$ が空でないことがわかる [6]. 以下の補題は鈴木 [3] と鈴木–高橋 [4] によって得られた結果である. これらの補題は本研究の本質となる補題である.

補題 1 ([3, Lemma 2]). $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ をバナッハ空間 E の有界点列とし, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1)$ 上の点列で $0 < \liminf_n \alpha_n \le \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たすものとする. $z_n = \alpha_n w_n + (1-\alpha_n) z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ とし

$$\limsup_{n\to\infty} (\|w_n - w_{n+k}\| - \|z_n - z_{n+k}\|) \le 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

とする. このとき $\liminf_{n\to\infty} \|w_n - z_n\| = 0$ となる.

補題 2 ([4, Lemma 2]). A と B を $[0,\infty)$ の部分集合で可測集合とし, $\{t_n\}$ を $(0,\infty)$ の点列で $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ を満たすものとする. さらに

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu([0,t_n) \cap A)}{t_n} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\mu([0,t_n) \cap B)}{t_n} = 1$$

を満たす (ただし, μ はルベーグ測度である). このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu([0,t_n)\cap A\cap B)}{t_n}=1$$

であり, かつ任意の $t>0$ について $[t,\infty)\cap A\cap B\neq\emptyset$ である.

さらにもう 1 つの補題が必要となるが, その補題を紹介する前にいくつかの定義を与える. C をバナッハ空間 E のコンパクトで凸な部分集合とし, $\{T(t):t\geq 0\}$ を C 上の one-parameter asymptotically nonexpansive semigroup とする. $z\in C$ に対して, $l=\limsup_{t\to\infty}\|T(t)z-z\|$, $A=\bigcap_{t>0}C(t)$ とする. ただし $C(t)$ は $\{T(s)z:s\geq t\}$ の閉包である. $l>0$ とする. $u\in C$, $\varepsilon>0$, そして $0\leq p<q\leq\infty$ を満たす p,q に対して

$$B(u,p,q,\varepsilon)=\{t\in[p,q):\|T(t)z-u\|\geq l-\varepsilon\}$$

とする.

補題 3 ([4, Lemma 3]). U を A の有限集合とする.

$$B(z,t,\infty,\varepsilon)\cap\left(\bigcap_{u\in U}B(u,t,\infty,\varepsilon)\right)\neq\emptyset,\ \forall t\in(0,l)$$

が成り立つと仮定する. このとき, $v\in A$ が存在して, $\|v-z\|=l$ を満たし, かつ $u\in U$ に対して $\|v-u\|\geq l$ を満たす.

3 Main Results

この節では, 一般のバナッハ空間の one-parameter asymptotically nonexpansive semigroup に対する 2 つの不動点定理と, Mann 型の点列に関する強収束定理を証明する.

定理 1. C をバナッハ空間 E のコンパクトで凸な部分集合とし $\{T(t):t\geq 0\}$ を C 上の *one-parameter asymptotically nonexpansive semigroup* とする. $z\in C$ に対して

$$\liminf_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)zds-z\right\|=0$$

を満たすとする. このとき $z\in\bigcap_{t\geq 0}F(T(t))$ となる.

証明. 任意の $t>0, x\in C$ に対して

$$l=\limsup_{t\to\infty}\|T(t)z-z\|,\ M(t,x)=\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$$

とする．このとき $l=0$ を示せば十分である．実際，$l=0$ とすると $\lim_{s\to\infty}T(s)z=z$ となる．このことから任意の $t\geq 0$ に対して

$$T(t)z=T(t)\lim_{s\to\infty}T(s)z=\lim_{s\to\infty}T(t+s)z=z.$$

$l>0$ を仮定する．l の定義から，$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty}\|T(t_n)z-z\|=l$ を満たす増加列 $\{t_n\}$ が存在する．$\{T(t_n)z\}\subset C$ であり，かつ C がコンパクトであることから，部分列 $\{t_{n_i}\}\subset\{t_n\}$ が存在して，$\{T(t_{n_i})z\}$ が $u_1\in C$ に強収束する．このとき $u_1\in A$ であり，かつ $\|u_1-z\|=l$ となる．また仮定から増加列 $\{t_n\}$ が存在して $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ が成り立ち，かつ $\{M(t_n,z)\}$ が z に強収束する．$\|u-z\|=l$ を満たす任意の $u\in A$ と $\varepsilon\in(0,l)$ に対し，まずはじめに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu\left(B(u,0,t_n,\varepsilon)\right)}{t_n}=1$$

を示す．

$\limsup_{t\to\infty}\|T(t)z-z\|=l$ であり，かつ $\limsup_{t\to\infty}k(t)\leq 1$ であることから，任意の $\delta>0$ に対し，$s_0\in[0,\infty)$ が存在して，任意の $t\geq s_0$ に対し $\|T(t)z-z\|\leq l+\delta$ かつ $k(t)\leq 1+\delta$ を満たす．さらに，$u\in A$ であるから，$\|T(s_1)z-u\|\leq\delta$ を満たす $s_1\geq s_0$ が存在する．それゆえ，任意の $t>2s_1$ に対して

$$\begin{aligned}\|T(t)z-u\|&\leq\|T(t)z-T(s_1)z\|+\|T(s_1)z-u\|\\&\leq k(s_1)\|T(t-s_1)z-z\|+\|T(s_1)z-u\|\\&\leq(1+\delta)(l+\delta)+\delta\\&=l+(2+l+\delta)\delta.\end{aligned}$$

$t_n>2s_1$ とし，$D=\sup\{\|z\|:z\in C\}$ とする．

$$\begin{aligned}l&=\|z-u\|\\&\leq\|z-M(t_n,z)\|+\|M(t_n,z)-u\|\\&=\|z-M(t_n,z)\|+\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(T(t)z-u)dt\right\|\\&\leq\|z-M(t_n,z)\|+\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}\|T(t)z-u\|dt\\&\leq\|z-M(t_n,z)\|+\frac{2s_1}{t_n}D+\frac{1}{t_n}\int_{2s_1}^{t_n}\|T(t)z-u\|dt\end{aligned}$$

であり, かつ

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t_n}\int_{2s_1}^{t_n}\|T(t)z-u\|dt\\
&=\frac{1}{t_n}\int_{B(u,2s_1,t_n,\varepsilon)}\|T(t)z-u\|dt+\frac{1}{t_n}\int_{[2s_1,t_n)\setminus B(u,2s_1,t_n,\varepsilon)}\|T(t)z-u\|dt\\
&\le\frac{1}{t_n}\mu(B(u,2s_1,t_n,\varepsilon))\,(l+(2+l+\delta)\delta)+\frac{1}{t_n}\mu\left([2s_1,t_n)\setminus B(u,2s_1,t_n,\varepsilon)\right)(l-\varepsilon)\\
&\le\frac{1}{t_n}\mu\left(B(u,0,t_n,\varepsilon)\right)(l+(2+l+\delta)\delta)+\frac{1}{t_n}\mu\left([0,t_n)\setminus B(u,0,t_n,\varepsilon)\right)(l-\varepsilon)\\
&=\frac{1}{t_n}\mu\left(B(u,0,t_n,\varepsilon)\right)(l+(2+l+\delta)\delta)+\frac{1}{t_n}\left(t_n-\mu\left(B(u,0,t_n,\varepsilon)\right)\right)(l-\varepsilon)\\
&=l-\varepsilon+\frac{1}{t_n}\mu\left(B(u,0,t_n,\varepsilon)\right)\left(\varepsilon+(2+l+\delta)\delta\right)
\end{aligned}
$$

であることから (ただし μ はルベーグ測度)

$$
l\le\|z-M(t_n,z)\|+\frac{2s_1}{t_n}D+l-\varepsilon+\frac{1}{t_n}\mu\left(B(u,0,t_n,\varepsilon)\right)(\varepsilon+(2+l+\delta)\delta)\,.
$$

それゆえ

$$
\liminf_{n\to\infty}\frac{\mu\left(B(u,0,t_n,\varepsilon)\right)}{t_n}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{-\|z-M(t_n,z)\|-\frac{2s_1}{t_n}D+\varepsilon}{\varepsilon+(2+l+\delta)\delta}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+(2+l+\delta)\delta}.
$$

$\delta>0$ が任意であることから, $\liminf_{n\to\infty}\frac{\mu(B(u,0,t_n,\varepsilon))}{t_n}\ge 1$. また, $\frac{\mu(B(u,0,t_n,\varepsilon))}{t_n}\le 1$ は明らか. 故に $\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(B(u,0,t_n,\varepsilon))}{t_n}=1$. 次に

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\mu\left(B(z,0,t_n,\varepsilon)\right)}{t_n}=1,\ \forall\varepsilon\in(0,l)
$$

を示す. 任意の $\varepsilon\in(0,l)$ に対し, $s_2\ge 0$ が存在して $\|T(s_2)z-u_1\|\le\varepsilon/4$ かつ $k(s_2)\le\frac{l-\varepsilon/2}{l-\varepsilon}$ を満たす. $t_n>s_2$ とし, $t\in B(u_1,s_2,t_n,\varepsilon/4)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\|T(t-s_2)z-z\|&\ge\frac{1}{k(s_2)}\|T(t)z-T(s_2)z\|\\
&\ge\frac{1}{k(s_2)}\left(\|T(t)z-u_1\|-\|T(s_2)z-u_1\|\right)\\
&\ge\frac{l-\varepsilon}{l-\varepsilon/2}(l-\varepsilon/2)\\
&=l-\varepsilon.
\end{aligned}
$$

それゆえ

$$
\begin{aligned}
\mu\left(B(z,0,t_n,\varepsilon)\right)&\ge\mu\left(\{t-s_2:t\in B(u_1,s_2,t_n,\varepsilon/4)\}\right)\\
&=\mu\left(B(u_1,s_2,t_n,\varepsilon/4)\right)\\
&=\mu\left(B(u_1,0,t_n,\varepsilon/4)\setminus[0,s_2)\right)\\
&\ge\mu\left(B(u_1,0,t_n,\varepsilon/4)\right)-s_2.
\end{aligned}
$$

$u_1 \in A$ であることから

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mu\left(B(z,0,t_n,\varepsilon)\right)}{t_n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\mu\left(B(u_1,0,t_n,\varepsilon/4)\right) - s_2}{t_n} = 1.$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu\left(B(z,0,t_n,\varepsilon)\right)}{t_n} = 1.$$

最後に数学的帰納法を用いることにより $u_m \in A$, $\|u_m - z\| = l$ であり, そして $i \neq j$ について $\|u_i - u_j\| \geq l$ となる $\{u_m\}$ が存在することを示す. $\|u_1 - z\| = l$ は成り立っている. もし $u_1, \dots, u_m$ が仮定を満たしているとすると, 以下のようにして u_{m+1} を構成することができる: $\lim_{n\to\infty} \mu\left(B(z,0,t_n,\varepsilon)\right)/t_n = 1 \quad (\forall i \in \{1,\dots,m\})$ かつ $\varepsilon \in (0,l)$ であるから, Lemma 2 より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu\left(B(z,0,t_n,\varepsilon) \cap \bigcap_{i=1}^m B(u_i,0,t_n,\varepsilon)\right)}{t_n} = 1$$

かつ

$$B(z,t,\infty,\varepsilon) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m B(u_i,t,\infty,\varepsilon)\right) \neq \emptyset \quad \forall t \geq 0.$$

よって Lemma 3 より, u_{m+1} を見つけることができる. $\{u_m\} \subset A$ が C 上の点列でありかつ C がコンパクトであることから, $\{u_n\}$ の強収束する部分列が存在する. よって矛盾を得る. すなわち $l = 0$ となる. □

Theorem 1 を用いることにより, 以下の不動点定理を得ることができる.

定理 2. C をバナッハ空間 E のコンパクトで凸な部分集合とし, $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の *one-parameter asymptotically nonexpansive semigroup* とする. このとき $\{T(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点が存在する.

証明. 任意の $f \in C(\mathbb{R}^+)$ に対し, $\mu_n(f) = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} f(s)ds$ とする. ただし $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ かつ $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. はじめに $\{\mu_n\}$ が, $C(\mathbb{R}^+)$ 上の asymptotically invariant mean の列であることを示す. $f \in C(\mathbb{R}^+)$ と $n \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned}
|\mu_n(f)| &= \left|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} f(s)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} |f(s)|ds \\
&\leq \|f\|
\end{aligned}$$

かつ $\mu_n(1)=1$ であることから, $\|\mu_n\|=\mu_n(1)=1$ となる. これは μ_n が mean であることを示している. さらに, 任意の $h\geq 0$ について

$$\begin{aligned}|\mu_n(f)-\mu_n(r_hf)| &= \left|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} f(s)ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} f(s+h)ds\right| \\ &= \left|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} f(s)ds - \frac{1}{t_n}\int_h^{h+t_n} f(s)ds\right| \\ &= \left|\frac{1}{t_n}\int_0^{h} f(s)ds - \frac{1}{t_n}\int_{t_n}^{t_n+h} f(s)ds\right| \\ &\leq \frac{2\|f\|h}{t_n}\end{aligned}$$

となる. すなわち $\lim_{n\to\infty}|\mu_n(f)-\mu_n(r_hf)|=0$. よって $\{\mu_n\}$ が asymptotically invariant であることがわかる. μ を weak*topology で $\{\mu_n\}$ の収積点であるとする. このとき $\{\mu_n\}$ の部分ネット $\{\mu_{n_\alpha}\}$ が存在して, $\{\mu_{n_\alpha}\}$ が μ に weak* topology で収束し, さらに μ は invariant mean となる [6]. すなわち, 任意の $x\in C$ と $y^*\in E^*$ について

$$\lim_\alpha \mu_{n_\alpha}\langle T(\cdot)x, y^*\rangle = \mu\langle T(\cdot)x, y^*\rangle.$$

Bochner 積分から, $\mu_{n_\alpha}\langle T(\cdot)x,y^*\rangle = \langle \frac{1}{t_{n_\alpha}}\int_0^{t_{n_\alpha}} T(s)xds, y^*\rangle$. また mean の性質から, $\mu\langle T(\cdot)x,y^*\rangle=\langle x_0,y^*\rangle$ を満たす $x_0\in C$ がただ 1 点存在する. $x_0=T_\mu x$ とする. このとき, 任意の $x\in C$ と $y\in E^*$ について

$$\lim_\alpha\langle\frac{1}{t_{n_\alpha}}\int_0^{t_{n_\alpha}} T(s)xds, y^*\rangle = \langle T_\mu x, y^*\rangle$$

となる, すなわち $\frac{1}{t_{n_\alpha}}\int_0^{t_{n_\alpha}} T(s)xds$ が $T_\mu x$ に弱収束する. C がコンパクトであることから, $\frac{1}{t_{n_\alpha}}\int_0^{t_{n_\alpha}} T(s)xds$ が $T_\mu x$ に強収束している. さらに T_μ は nonexpansive 写像である. 実際, 任意の $x,y\in C$ に対し

$$\begin{aligned}\|T_\mu x-T_\mu y\|^2 &= \langle T_\mu x - T_\mu y, j\rangle \\ &= \mu\langle T(\cdot)x - T(\cdot)y, j\rangle \\ &\leq \mu\|T(\cdot)x-T(\cdot)y\|\|j\| \\ &= \mu\|T(\cdot)x-T(\cdot)y\|\|T_\mu x-T_\mu y\| \\ &\leq \limsup_{t\to\infty} k(t)\|x-y\|\|T_\mu x - T_\mu y\| \\ &\leq \|x-y\|\|T_\mu x-T_\mu y\|.\end{aligned}$$

ただし $j\in J(T_\mu x-T_\mu y)$ である. バナッハ空間のコンパクトで凸な部分集合上で定義された nonexpansive 写像は不動点を持つことから, $F(T_\mu)\neq\emptyset$ [6]. $z\in F(T_\mu)$ につ

いて

$$\liminf_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)z - z\right\| \le \liminf_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds - z\right\|$$
$$\le \lim_{\alpha}\left\|\frac{1}{t_{n_\alpha}}\int_0^{t_{n_\alpha}} T(s)zds - z\right\|$$
$$= \|T_\mu z - z\| = 0.$$

よって Theorem 1 から, $z \in \bigcap_{t\ge 0} F(T(t))$ となる. □

Theorem 2 の証明を DeMarr[1] や高橋 [5] の証明と比べてみると Theorem 2 の証明においては, $F(T_\mu) = \bigcap_{t\ge 0} F(T(t))$ という事実を証明したことにもなる. Theorems 1 と Theorems 2 を用いることにより, Mann 型の点列に対する強収束定理を証明する.

定理 3. C をバナッハ空間 E のコンパクトで凸な部分集合とし, $\{T(t) : t \ge 0\}$ をリプシッツ定数が $\{k(t) : t \ge 0\}$ である C 上の *one-parameter asymptotically nonexpansive semigroup* とする. $x_1 \in C$ とし, $\{x_n\}$ を以下で定義する:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds + (1-\alpha_n)x_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{t_n\} \subset (0,\infty)$ が $0 < \liminf_{n\to\infty}\alpha_n \le \limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, そして $\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}} = 1$ を満たす.

$L_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} k(s)ds - 1$ とし, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n L_n < \infty$ ならば, $\{x_n\}$ は $\{T(t) : t \ge 0\}$ の共通不動点 z_0 に強収束する.

証明. $w \in \bigcap_{t\ge 0} F(T(t))$ とする. 任意の $k, n \ge 0$ に対して

$$\|x_{n+k} - w\| = \left\|\frac{\alpha_{n+k-1}}{t_{n+k-1}}\int_0^{t_{n+k-1}} T(s)x_{n+k-1}ds + (1-\alpha_{n+k-1})x_{n+k-1} - w\right\|$$
$$\le \left(\frac{\alpha_{n+k-1}}{t_{n+k-1}}\int_0^{t_{n+k-1}} k(s)ds + (1-\alpha_{n+k-1})\right)\|x_{n+k-1} - w\|$$
$$= (\alpha_{n+k-1}L_{n+k-1} + 1)\|x_{n+k-1} - w\|$$
$$\le (\alpha_{n+k-1}L_{n+k-1} + 1)(\alpha_{n+k-2}L_{n+k-2} + 1)\|x_{n+k-2} - w\|$$
$$\le \cdots$$
$$\le \left(\prod_{i=n}^{n+k-1}(\alpha_i L_i + 1)\right)\|x_n - w\|.$$

このことから

$$\limsup_{k\to\infty}\|x_k - w\| = \limsup_{k\to\infty}\|x_{n+k} - w\| \le \left(\prod_{i=n}^{\infty}(\alpha_i L_i + 1)\right)\|x_n - w\|.$$

$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i L_i < \infty$ より, $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty} (\alpha_i L_i + 1) = 1$. すなわち

$$\limsup_{k\to\infty} \|x_n - w\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n - w\|.$$

よって $\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\|$ が存在する. $\varepsilon > 0$ とする. $\limsup_{t\to\infty} k(t) = 1$ そして $t_n \to \infty$ であることから, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ について $(1/t_n)\int_0^{t_n} k(s)ds \leq 1+\varepsilon$ となる. $D = \sup_{z\in C} \|z\|$ とする. $n \geq n_0$ について

$$\begin{aligned}
&\|M(t_n, x_n) - M(t_{n+k}, x_{n+k})\| - \|x_n - x_{n+k}\| \\
&\leq \|M(t_n, x_n) - M(t_n, x_{n+k})\| + \|M(t_n, x_{n+k}) - M(t_{n+k}, x_{n+k})\| - \|x_n - x_{n+k}\| \\
&\leq \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} k(s)ds\|x_n - x_{n+k}\| + \|M(t_n, x_{n+k}) - M(t_{n+k}, x_{n+k})\| - \|x_n - x_{n+k}\| \\
&\leq (1+\varepsilon)\|x_n - x_{n+k}\| + \|M(t_n, x_{n+k}) - M(t_{n+k}, x_{n+k})\| - \|x_n - x_{n+k}\| \\
&= \varepsilon\|x_n - x_{n+k}\| + \|M(t_n, x_{n+k}) - M(t_{n+k}, x_{n+k})\| \\
&= \varepsilon\|x_n - x_{n+k}\| + \left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_{n+k}ds - \frac{1}{t_{n+k}}\int_0^{t_{n+k}} T(s)x_{n+k}ds\right\| \\
&\leq \varepsilon\|x_n - x_{n+k}\| + \left(\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t_{n+k}}\right)\left\|\int_0^{t_n} T(s)x_{n+k}ds\right\| + \frac{1}{t_{n+k}}\left\|\int_{t_n}^{t_{n+k}} T(s)x_{n+k}ds\right\| \\
&\leq 2\varepsilon D + \left(\frac{t_n}{t_n} - \frac{t_n}{t_{n+k}} + \frac{t_{n+k} - t_n}{t_{n+k}}\right) D
\end{aligned}$$

が任意の $k \in \mathbb{N}$ で成り立つ. よって $\limsup_{n\to\infty} (\|M(t_n, x_n) - M(t_{n+k}, x_{n+k})\| - \|x_n - x_{n+k}\|)$ $\leq 2\varepsilon D$ となる. $\varepsilon > 0$ の任意性から

$$\limsup_{n\to\infty} (\|M(t_n, x_n) - M(t_{n+k}, x_{n+k})\| - \|x_n - x_{n+k}\|) \leq 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

を得る. よって Lemma 1 から, $\liminf_{n\to\infty} \|M(t_n, x_n) - x_n\| = 0$. C がコンパクトであることから, 一般性を失うことなく, 部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} \|M(t_{n_k}, x_{n_k}) - x_{n_k}\| = 0$ を満たし, かつ C 上のある点 z_0 に強収束する. 任意の $n_k \geq n_0$ について

$$\begin{aligned}
&\|M(t_{n_k}, z_0) - z_0\| \\
&\leq \|M(t_{n_k}, z_0) - M(t_{n_k}, x_{n_k})\| + \|M(t_{n_k}, x_{n_k}) - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - z_0\| \\
&\leq (1+\varepsilon)\|x_{n_k} - z_0\| + \|M(t_{n_k}, x_{n_k}) - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - z_0\|.
\end{aligned}$$

すなわち

$$\limsup_{k\to\infty} \|M(t_{n_k}, z_0) - z_0\| \leq 0.$$

よって

$$\liminf_{t\to\infty} \|M(t, z_0) - z_0\| = \lim_{k\to\infty} \|M(t_{n_k}, z_0) - z_0\| = 0.$$

ゆえに Theorem 1 から, $z_0 \in \bigcap_{t\geq 0} F(T(t))$ となる. $\{\|x_n - z_0\|\}$ が収束列であることから

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_0\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - z_0\| = 0$$

となり, 定理は証明できた. $\square$

注意 1. $t_n = n^2$ そして $k(s) = 1 + se^{-s}$ とする. このとき $\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$ かつ

$$L_n = \frac{1}{n^2}\int_0^{n^2} k(s)ds - 1 = \frac{1}{n^2}\int_0^{n^2} se^{-s}ds \leq \frac{1}{n^2}$$

となる. すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n L_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} L_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

このことから, $\{t_n\}$ と $\{k(s) : s \geq 0\}$ が Theorem 3 の条件を満たしていることがわかる.

参考文献

[1] E. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific. J. Math., **13** (1963), 1139–1141.

[2] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[3] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **3** (2002), 381–391.

[4] T. Suzuki and W. Takahashi , *Strong convergence of Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **5** (2004), 209–216.

[5] W. Takahashi, *Fixed point theorem for amenable semigroup of nonexpansive mappings*, Kōdai Math. Semi. Rep., **21** (1969), 383–386.

[6] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.